181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Cadre : $(E, \overrightarrow{E})$ est un espace affine de dimension finie, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

I Barycentre

1) Définition et premières propriétés

Définition 1. Un couple $(A, \alpha) \in E \times \mathbb{R}$ est appelé point pondéré.

Définition 2. Une suite $(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de points pondérés définie une application L de E dans $\overrightarrow{E}$, appelée fonction vectorielle de Leibniz, en posant $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Proposition 3. *Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, f est constante, sinon f est bijective.*

Définition 4. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, l'unique point $B \in E$ tel que $f(B) = \overrightarrow{0}$ est appelé barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On note $B = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Exemple 5. $[A, B] = \left\{\mathrm{Bar}((A, t), (B, 1-t)) \mid t \in [0, 1]\right\}$

Proposition 6. *Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et soient $(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(B_i, \beta_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ des points pondérés, on a alors :*

(i) (Homogénéité) $\mathrm{Bar}(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

(ii) (Associativité) Si $G = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)$ et $G' = \mathrm{Bar}(B_i, \beta)$, alors :

$$\mathrm{Bar}\left((A_i, \alpha_i), (B_i, \beta_i)\right) = \mathrm{Bar}\left(\left(G, \sum_{i=0}^n \alpha_i\right), \left(G', \sum_{i=1}^p \beta_i\right)\right)$$

Définition 7. L'isobarycentre de $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est $\mathrm{Bar}(A_i, 1)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Exemple 8. *L'isobarycentre d'un triangle est son centre de gravité.*

2) Barycentres et sous-espaces affines

Théorème 9. *Soit $F \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) F est un sous-espace affine de E.

(ii) F contient les barycentres de familles de points de F.

(iii) F contient les barycentres de tout couples de points de F.

Exemple 10. *Dans $\mathbb{R}^2$, les droites sont des sous-espaces affines.*

Définition 11. Soit $A \subset E$ non vide. Le sous-espace affine engendré par A, noté $\mathrm{Aff}(A)$, est l'intersection des sous-espaces affines contenant A.

Proposition 12. $\mathrm{Aff}(A)$ *est l'ensemble des barycentres de points de A.*

Définition 13. Soient $(F, \overrightarrow{F})$ un espace affine de dimension finie et $f : E \to F$. On dit que f préserve les barycentres si, pour des points pondérés $(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E, on a :

$$f\left(\mathrm{Bar}(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = \mathrm{Bar}(f(A_i), \lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$$

Théorème 14. *Soient $(F, \overrightarrow{F})$ un espace affine de dimension finie et $f : E \to F$. Alors f est affine si, et seulement si, elle préserve les barycentres.*

3) Coordonnées barycentriques

Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de E.

Théorème 15. *Tout point de E est un barycentre des $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et deux systèmes de poids seront proportionnels.*

Définition 16. Soit $M \in E$. Il existe un unique $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ sont les coordonnées barycentriques de M relativement à $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

Exemple 17. *Soient A, B et C sont trois points d'un plan affine P, et soit $\mathcal{B}$ une base du plan vectoriel directeur de P. Soit $M \in P$. Les coordonnées de M relativement à A, B et C sont* $(\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}), \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$.

Application 18 (Équation barycentrique d'une droite de $\mathbb{R}^2$). *Soit $M \in (AB)$. Dans un repère affine (A_0, A_1, A_2), les points A, B et M ont pour coordonnées barycentriques $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β'') et (x, y, z). La droite (AB) admet pour équation :*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & x \\ \alpha' & \beta & y \\ \alpha'' & \beta'' & z \end{vmatrix} = 0$$

II Convexité

1) Définition et premières propriétés

Définition 19. Soit $C \subset E$. On dit que C est convexe si, pour tous $A, B \in C$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Bar}((A,t),(B,1-t)) \in C$.

Exemple 20. *(i)* $\overline{B(0,1}$ *est convexe.*

(ii) Les convexes de $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Proposition 21. *C est convexe si, et seulement si, C contient le barycentre de toute famille de points pondérés à poids positifs de C.*

Proposition 22. *Soient $(F, \overrightarrow{F})$ un espace affine, $f : E \to F$ une application affine, C un convexe de E et T un convexe de F. Alors $f(C)$ est convexe dans F, et $f^{-1}(T)$ est convexe de E.*

Proposition 23. *Si $F \subset E$ est un sous-espace affine, alors F est convexe.*

Proposition 24. *Si C est convexe, alors C est connexe par arcs.*

Remarque 25. *Si C est convexe, alors C est connexe.*

Exemple 26. *Soient C_1 et C_2 sont convexes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $C_1 \times C_2$ et $\lambda C_1 + \mu C_2$ sont convexes.*

Exemple 27. *Le produit de n segments est convexe.*

Proposition 28. *Si C est convexe, alors $\overline{C}$ est convexe.*

Définition 29. Soit A un convexe de E. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Proposition 30. *Soit A un convexe de E, et soit $f : A \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si, et seulement si, $\mathrm{Epi}(f) = \left\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \;\middle|\; x \in A, t \geqslant f(x)\right\}$ est un convexe de $E \times \mathbb{R}$.*

2) Enveloppe convexe

Proposition 31. *Une intersection de convexe est convexe.*

Définition 32. Soit $A \subset E$, l'enveloppe convexe de A est le plus petit convexe contenant A. C'est aussi l'intersection de tous les convexes contenant A. On le note $\mathrm{Conv}(A)$.

Exemple 33. *Soit ABC un triangle, alors $ABC = \mathrm{Conv}(\{A, B, C\})$.*

Théorème 34. *Soit $A \subset E$ non vide.*

(i) Si A est convexe, alors $A = \mathrm{Conv}(A)$.

(ii) Si A est ouvert, alors $\mathrm{Conv}(A)$ est ouvert.

Contre-exemple 35. *Si $A = \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \;\middle|\; xy \geqslant 1\right\}$ alors, $\mathrm{Conv}(A) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}^{+\star})^2$. A est fermé, mais pas $\mathrm{Conv}(A)$.*

Théorème 36 (Lucas)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.*

Théorème 37 (Carathéodory)**.** *Soit $A \subset E$. Tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ est barycentre de au plus $\dim E + 1$ points pondérés de A.*

Exemple 38. *Pour le cercle, il faut 2 points. Pour le carré, il en faut 3.*

Corollaire 39. *Soit $A \subset E$.*

(i) Si A est compacte, $\mathrm{Conv}(A)$ aussi.

(ii) Si A est bornée, $\mathrm{Conv}(A)$ aussi, et $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\mathrm{Conv}(A))$.

3) Point extrémal

Définition 40. Soit A un convexe de E. On dit que $M \in A$ est un point extrémal de A lorsque :

$$\forall P, Q \in A,\ \forall t \in [0,1],\ M = tP + (1-t)Q \Rightarrow M = P \text{ ou } M = Q$$

On note $\mathrm{Extr}(A)$ l'ensemble de ces points.

Proposition 41. *Soit A un convexe de E, et soit $M \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $M \in \mathrm{Extr}(A)$

(ii) $A \setminus \{0\}$ *est convexe.*

(iii) Si M est barycentre à poids positifs de points de A, alors il est égal à l'un de ces points.

Exemple 42. $\mathrm{Extr}([A,B]) = \{A, B\}$

Théorème 43 (Krein-Milgram)**.** *Soit A un convexe compact non vide de E. Alors $A = \mathrm{Conv}(\mathrm{Extr}(A))$.*

Proposition 44. *Soit A un convexe de E. Si $f : A \to \mathbb{R}$ est convexe et continue, alors $\sup_A(f) = \sup_{\mathrm{Extr}(A)}(f)$.*

III Applications

1) Théorème de séparation

Définition 45. $H \subset E$ est un hyperplan affine de E s'il existe une application affine $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $H = f^{-1}(0)$. Les parties $f^{-1}(\mathbb{R}^{-\star})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$ sont appelées demi-espaces ouverts déterminés par H.

Proposition 46. *Soient X un espace affine, A un ouvert convexe non vide et L un sous-espace affine de X tel que $A \cap L = \varnothing$. Alors il existe un hyperplan de X qui contient L et ne rencontre pas A.*

Définition 47. Soient X un espace affine, A, B deux parties de X et H un hyperplan. On dit que H sépare strictement A et B si A est dans l'un des deux demi-espaces ouverts déterminés par H et B dans l'autre.

Théorème 48 (Hahn-Banach géométrique)**.** *Si A et B sont deux convexes avec A fermé non vide et B compact tel que $A \cap B = \varnothing$. Alors il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B.*

2) Géométrie

Théorème 49. *Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}n$, on note $Vol(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$, alors :*

$$Vol(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

Lemme 50. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, et $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors :*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Application 51 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant K.*

Développements

- Théorème de Carathéodory (37,39) [Gou]
- Ellipsoïde de John-Loewner (50,51) [FGN]

Références

[Tau] Patrice Tauvel. *Cours de Géométrie.* Dunod

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini